

Метод Гаусса

Метод Гаусса — метод решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Назван в честь К. Гаусса.

Идея метода: исходную систему уравнений записывают в виде матрицы — числовой таблицы со строками и столбцами. Такой подход позволяет работать только с коэффициентами и свободными членами, не оперируя буквенными обозначениями.

Цель метода: с помощью последовательности элементарных преобразований привести систему к «упрощённому» виду, в котором легко описать все её решения или понять, что решений нет.

Алгоритм

Некоторые этапы метода Гаусса:

- Формирование дополнительной матрицы — она состоит из матрицы коэффициентов и вектора правых частей. Это позволяет обрабатывать систему линейных уравнений как одну матрицу, что упрощает применение элементарных преобразований строк.
- Элементарное преобразование строк — перестановка строк, умножение строки на скаляр и прибавление одной строки к другой. Эти операции не меняют множество решений системы.
- Приведение к верхнетреугольному виду — все элементы ниже главной диагонали равны нулю. Это достигается путём последовательного обнуления элементов ниже главной диагонали с помощью элементарных преобразований строк.
- Обратный ход — начинается с последнего уравнения и постепенно выражает каждую неизвестную через уже найденные. Этот процесс продолжается, пока не будут найдены все неизвестные.

- Проверка совместности и однозначности решения — в конце процедуры метода Гаусса проверяют совместность системы и однозначность её решения. Система считается совместной, если матрица коэффициентов невырожденная (её определитель не равен нулю), и несовместной в противном случае. Если система совместна, и ранг матрицы коэффициентов равен количеству переменных, то она имеет единственное решение.

Важно: метод Гаусса работает только с линейными уравнениями, где переменные не возводятся в степень и не перемножаются друг на друга. Для нелинейных систем есть другие методы, например метод Ньютона.

Примеры

Один из примеров — решение системы из двух линейных уравнений с двумя переменными. Алгоритм:

1. Представить систему в матричном виде, убрав сами переменные и оставив только коэффициенты при них и свободные члены. Так получится расширенная матрица системы.

2. Упростить строки матрицы: подобрать общий множитель (или знаменатель) для каждой строки и разделить все элементы строки на него. Цель — получить в первом столбце единицу, чтобы упростить дальнейшие преобразования.

3. С помощью простых операций — вычитания, умножения, перестановки строк — привести матрицу к более простому виду. Цель — получить такую форму, в которой одно из уравнений будет содержать только одну переменную.

В итоге получают решение системы или выясняют, что решений нет либо их бесконечно много.

Реализация

Метод Гаусса может быть реализован на программируемых языках, например, на Python. Однако вычислительно метод Гаусса не всегда эффективен,

поэтому на практике при работе с большими объёмами данных он обычно не используется в явном виде. Однако он тесно связан с другими более быстрыми алгоритмами (например, LU-разложением) и полезен для понимания работы с матрицами.